Übungen zur Vorlesung

# Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 08.12.2021, 17 Uhr

**Aufgabe 21:** Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Beweise oder widerlege:

(i) $n_k \to \infty$ gilt genau dann, wenn in der Folge $n_k$ jede natürliche Zahl $m$ höchstens endlich oft vorkommt.

(ii) $n_k \to \infty$ gilt genau dann, wenn keine Teilfolge $n_{k_j}$ der $n_k$, mit $k_j \geq j$, beschränkt ist.

(iii) $n_k \to \infty$ gilt genau dann, wenn $n_{k_j} \to \infty$ für jede Teilfolge $n_{k_j}$ der $n_k$ gilt, mit $k_j \geq j$.

(iv) $\xi$ ist Häufungswert einer Folge $x_n$ (gemäß unserer Definition II.1.3.1 in der Vorlesung) genau dann, wenn es eine gegen $\xi$ konvergente Teilfolge $x_{n_k}$ gibt, für die $n_k \to \infty$ gilt (aber nicht unbedingt $n_k \geq k$).

**Aufgabe 22:** [Intervallschachtelung] Gegeben sei eine absteigende Folge abgeschlossener reeller Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$, d.h.

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots .$$

(i) Zeige, dass

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

(ii) Für die Längen $|I_n| := b_n - a_n$ gelte $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$. Zeige, dass obiger Durchschnitt aus genau einer Zahl besteht.

(iii) Gelten (i), (ii) auch für die offenen Intervalle $\tilde{I}_n := (a_n, b_n)$?

**Aufgabe 23:** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

die Folge der arithmetischen Mittelwerte.

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeige, dass dann auch $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Was ist der Grenzwert?

(ii) Finde eine divergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Mittelwerte $\mu_n$ trotzdem konvergieren.

**Aufgabe 24:** Sei die unbeschränkte Folge $n \mapsto x_n$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Beweise oder widerlege: Jede reelle Zahl ist Häufungswert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

**Freiwillige Zusatzaufgabe:**
Beweise oder widerlege: Jede Folge reeller Zahlen enthält eine monotone Teilfolge.